Про одну неелементарну функцію типу інтеграла Доусона

Гой Т.П., *доц.*; Заторський Р.А., *проф.*
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ

Нехай $n^{\overline{m}}$, $n^{\underline{m}}$ $(n, m \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ – відповідно зростаючі та спадні факторіальні степені:

$$n^{\overline{m}} = n\,(n+1)\cdot\,\dots\,\cdot(n+m-1), \quad n^{\underline{m}} = n\,(n-1)\cdot\,\dots\,\cdot(n-m+1).$$

За аналогією з відомим степеневим розвиненням $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \big/ n!$, в якому факторіали можна розглядати як спадні факторіальні степені ($n! = n^{\underline{n}}$), у [1] досліджена функція дійсної змінної, побудована при допомозі зростаючих факторіальних степенів: $\mathrm{Exp}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \big/ n^{\overline{n}}$.

Замінивши тепер в інтегралі Доусона $F(x) = e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt$ показникову функцію на функцію Exp(x), одержуємо нову неелементарну функцію

$$D(x) = \left(\mathrm{Exp}(x^2)\right)^{-1}\int\limits_0^x \mathrm{Exp}(t^2)\,dt.$$

Теорема 1. Для всіх $x \in \mathbf{R}$ справджуються рівність

$$D(x) = \frac{2\sqrt{\pi}e^{x^2/4}\Phi(x/2) - x}{1 + \sqrt{\pi}xe^{x^2/4}\Phi(x/2)},$$

де $\Phi(p) = \operatorname{erf} x = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ – функція ймовірностей.

Теорема 2. Функція $D(x)$ є розв’язком задачі Коші

$$2(x^2+2)\,y' = (x^2-2)y^2 - x(x^2+6)y + 2(x^2+2), \quad y(0) = 0.$$

1. Т.П. Гой, Р.А. Заторський, *Буковинський мат. журн.* **1**, 1-2 (2013).